

单元素养测评卷(一)

第五章

(时间:120 分钟 分值:150 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 数列 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \dots$ 的通项公式可能是 ()

A. $a_n = (-1)^n \frac{1}{4-n}$ B. $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{4-n}$

C. $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$ D. $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{n+2}$

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_5 = 5$, 则 $a_3 =$ ()

A. 3 B. $\sqrt{5}$ C. $\pm\sqrt{5}$ D. $\frac{5}{2}$

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_8 = 24, a_{16} = 8$, 则 $a_{24} =$ ()

A. -24 B. -16 C. -8 D. 0

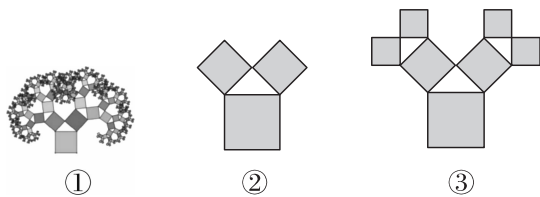
4. [2025·北京海淀区高二期中] 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n$, 则 $a_6 =$ ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 > a_2 > 0, a_7 + a_8 = 0$, 则当 S_n 取得最大值时, $n =$ ()

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

6. [2024·四川眉山高二期末] 图①是美丽的“勾股树”, 它是以正方形一边为斜边向外作直角三角形, 再以该直角三角形的两直角边分别向外作正方形, 重复这一过程得到的. 图②是第 1 代“勾股树”, 图③是第 2 代“勾股树”, 已知最大的正方形的面积为 1, 则第 n 代“勾股树”中所有正方形的个数与面积的和分别为 ()



A. $2^n - 1, n$ B. $2^n - 1, n + 1$
C. $2^{n-1} - 1, n$ D. $2^{n+1} - 1, n + 1$

7. [2025·湖南长沙高二期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $3S_n = a_n + 64$. 若 T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 则 T_n 的最大值为 ()

A. 2^9 B. 2^{14} C. 2^{15} D. 2^{16}

8. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 2n + \frac{k}{n}$, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n \geq a_3$ 成立, 则实数 k 的取值范围为 ()

A. $[12, 24]$ B. $(12, 24]$
C. $[3, 12]$ D. $(3, 12]$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 当首项 a_1 和 d 变化时, $a_3 + a_8 + a_{13}$ 是一个定值, 则下列各数也为定值的有 ()

A. a_7 B. a_8 C. S_{15} D. S_{16}

10. 已知两个等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+39}{n+3}$, 若 $\frac{a_n}{b_n}$ 为整数, 则正整数 n 的值可能为 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 14

11. [2025·河南驻马店高二期中] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 \neq a_2$, 且对任意正整数 n , 都有 $S_n \geq S_{2025}$, 则 ()

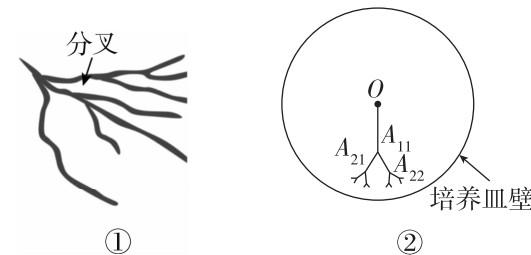
A. $a_1 < 0$
B. $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 $\frac{a_2 - a_1}{2}$ 的等差数列
C. $S_{4049} \leq 0$
D. 存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_n a_{n+1} < 0$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 某住宅小区计划植树不少于 100 棵, 若第一天种植 2 棵, 以后每天种植树木的棵数是前一天的 2 倍, 则至少需要的天数为_____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = an^2 - 10n$, 且对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $S_3 \leq S_n$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 某生物兴趣小组在显微镜下拍摄到一种黏菌的繁殖轨迹, 如图①. 通过观察发现, 该黏菌繁殖有如下规律: (1) 黏菌沿直线繁殖一段距离后, 就会以该直线为对称轴分叉 (分叉的角度约为 60°), 再沿直线繁殖; (2) 每次分叉后沿直线繁殖的距离约为前一段沿直线繁殖的距离的一半. 于是, 该组同学将整个繁殖过程抽象为如图②所示的一个数学模型: 黏菌从圆形培养皿的中心 O 开始, 沿直线繁殖到 A_{11} , 然后分叉向 A_{21} 与 A_{22} 方向继续繁殖, 其中 $\angle A_{21}A_{11}A_{22} = 60^\circ$, 且 $A_{11}A_{21}$ 与 $A_{11}A_{22}$ 关于 OA_{11} 所在直线对称, $A_{11}A_{21} = A_{11}A_{22} = \frac{1}{2}OA_{11}$. 若 $OA_{11} = 4$ cm, 为保证黏菌在繁殖过程中不会碰到培养皿壁, 则培养皿的半径 r ($r \in \mathbf{N}^*$, 单位: cm) 至少为_____.



四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)[2024·山西吕梁高二期中] 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^{n-1}} +$

$$\frac{3}{2^{n-2}} + \dots + \frac{n-1}{2^2} + \frac{n}{2}.$$

(1) 化简 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_{2n}\}$ 的前 n 项和 S_n .



16. (15 分)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_6 = -5, S_4 = -62$.
- (1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2)求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n .

17. (15 分)[2025·安徽安庆高二期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 7$,
- $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3, n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$
- (1)写出 a_2, a_3, a_4 ;
- (2)若 $b_n = a_{2n}$, 求数列 $\{n \cdot (b_n - 3)\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (17 分)已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且 a_1, a_2, a_3 中的任意两个数都不在表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行			
第二行	4	6	9
第三行	12	8	7

请从① $a_1 = 2$, ② $a_1 = 1$, ③ $a_1 = 3$ 这三个条件中选一个填入上表, 使满足以上条件的数列 $\{a_n\}$ 存在, 并在此存在的数列 $\{a_n\}$ 中, 试解答下列问题:

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若不等式 $S_n + \frac{\lambda}{a_n} \geqslant 4$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的最小值.

19. (17 分)已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{b_n} (n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1)若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2)若数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 求数列 $\left\{\frac{a_n^2}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .